Föreläsning 14

Hur ska man hitta nollställen till en funktion $f(x)$?

Dvs hur ska man lösa ekvationen

$$f(x) = 0\ ?$$

I många fall vet vi redan svaret, t.ex då $f(x) = ax + b$, $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(x) = \sin(x)$ eller $f(x) = \cos(x)$.

Ekvationer som kan vara svårare är t.ex.

$$x^3 = \cos(x)$$

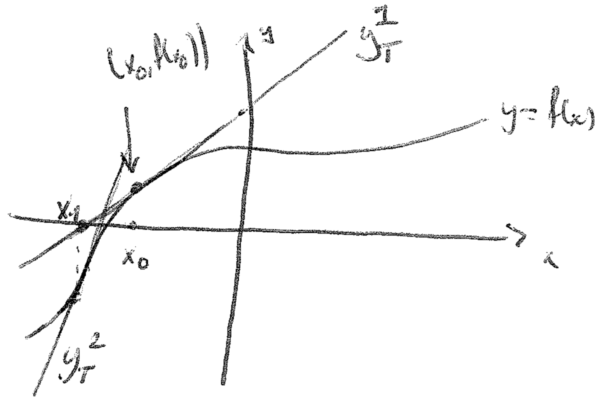
$$x^5 + 3x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Vi ska ta fram en metod för att approximera lösningarna till sådana ekvationer.

Vi ska börja med en metod som kallas för Newton-(Raphson) metoden.

Antag att vi har en funktion f som är deriverbar i en omgivning till f:s nollställen.

Gissa nu ett nollställe till f, säg $x = x_0$.



Rita nu tangenten y_T^1 i punkten $(x_0, f(x_0))$.
Tangenten y_T^1 skär x-axeln i en punkt x_1.
Dra nu en ny tangent i $(x_1, f(x_1))$, kalla denna y_T^2. Skärningen med y_T^2 med x-axeln kallar vi för x_2. Fortsätter vi denna process så kommer vi få ett x_n så att $f(x_n) \approx 0$.

Låt oss kolla lite mer analytiskt på detta. ③.

Tangenten y_T^1 ges av

$$y_T^1 = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Eftersom $(x_1, 0)$ ligger på linjen y_T^1 så får vi att

$$0 = f(x_0) + f'(x_0)(x_1 - x_0).$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$f'(x_0)x_1 = x_0 f'(x_0) - f(x_0)$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}.$$

Fortsätter vi så här så får vi att

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

Antag nu att ~~[illegible]~~ $x_n \to r$ ~~[illegible]~~ då $n \to \infty$. Då gäller att

$$r = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}\right) = r - \frac{f(r)}{f'(r)}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{f(r)}{f'(r)} = 0 \Rightarrow f(r) = 0.$$

Alltså $x_n \to r$ (nollställe till f), då $n \to \infty$

Ex:

Låt $f(x) = x^2 - 3$. Vi ska använda oss av Newtons metod för att hitta ett nollställe till x^2-3. Vi vill approximera $\sqrt{3}$ som är ett nollställe till $f(x)$. Vi börja med $x_0 = 2$. Då är

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

Vi måste därför derivera f: $f'(x) = 2x$. Detta ger att

$$x_1 = 2 - \frac{2^2-3}{2 \cdot 2} = 2 - \frac{1}{4} = 1,75$$

Vidare så får vi att

$$x_2 = 1,732143$$

$$x_3 = 1,732051$$

$$x_4 = 1,732051$$

Vi har att $\sqrt{3} \approx 1,732051$, så approximationen fungerar bra.

Ex:

Vi ska hitta ett nollställe till $f(x)=2\sin(x)-x$ genom att använda Newtons metod i fyra steg och använda $x_0=2$.

Vi börjar med att derivera.

$$f'(x)=2\cos(x)-1.$$

Detta ger att

$$x_1=2-\frac{2\sin(2)-2}{\cos(2)-1}\approx 1{,}87190$$

$$x_2=1{,}87190-\frac{2\sin(1{,}87190)-1{,}87190}{\cos(1{,}87190)-1}\approx$$

$$\approx 1{,}90130$$

$$x_3=1{,}90130-\frac{2\cdot\sin(1{,}90130)-1{,}90130}{\cos(1{,}90130)-1}\approx$$

$$\approx 1{,}894096$$

$$x_4\approx 1{,}8958$$

Observera att $f(1{,}8958)\approx 0{,}0006$.

Betrakta $2\sin(x) = x$ igen. ~~Man~~ Låt $f(x) = 2\sin(x)$.

Vi vill då hitta fixpunkterna till $f(x)$, dvs de

r så att $f(r) = r$. Detta är en annan metod

för att hitta nollställen till vissa typer av

funktioner. Idén här är att utgå från ett x_0,

där man tar att $f(x_0) = x_0$. Sätt sedan

$$x_1 = f(x_0)$$

$$x_2 = f(x_1) = f(f(x_0))$$

$$\vdots$$

$$x_{n+1} = f(x_n) = f(f \cdots f(x_0)) \cdots)$$

Här har vi itererat f $(n+1)$ gånger.
Denna metod kallas för iterationsmetoden.

Ex:
Vi betraktar samma exempel som tidigare.
Vi vill hitta ett nollställe till $f(x) = 2\sin(x) - x$, genom
att iterera 4 gånger. Låt $x_0 = 2$. Då är

$$x_1 = g(x_0) = g(2) \approx 1,8159$$

där $g(x) = 2\sin(x)$. Vidare så är

$$x_2 = g(1,8159) \approx 1,9389$$

$$x_3 = g(1,9389) \approx 1,8660$$

$$x_4 = g(1,8660) \approx 1,9135$$

Detta ger att

$$f(1,9135) \approx -0,0298.$$

Vi får alltså ett större fel med iterationsmetoden.

Ex:

Hitta ett nollställe till $x^3+6x-12=0$ genom att iterera 4 gånger med iterationsmetoden.
Vi använder oss av $x_0=1,5$.
Vi skriver om ekvationen genom att

$$x^3-12=-6x$$

$$\iff$$

$$-\frac{x^3}{6}+2=x.$$

Sätt $f(x)=-\frac{x^3}{6}+2$. Vi vill hitta en fixpunkt för f.
Vi får enligt iterationsmetoden att

$$x_1=f(1,5)\approx 1,4375$$

$$x_2=f(1,4375)\approx 1,5049$$

$$x_3=f(1,5049)\approx 1,43197$$

$$x_4=f(1,43197)\approx 1,51062$$

Ett nollställe till $x^3+6x-12$ är $(6+2\sqrt{11})^{1/3}-\frac{2}{(6+2\sqrt{11})^{1/3}}\approx 1,470.$

Iterationsmetoden ligger ganska nära, men inte lika bra som Newtons metod.

När man hamnar i följande situation så vet vi att iterationsmetoden fungerar:

Sats:

Låt $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uppfylla att

a) $f(x)\in[a,b]$ då $x\in[a,b]$.

b) $\exists K$ så att $0<K<1$ så att $\forall u,v\in[a,b]$ gäller att

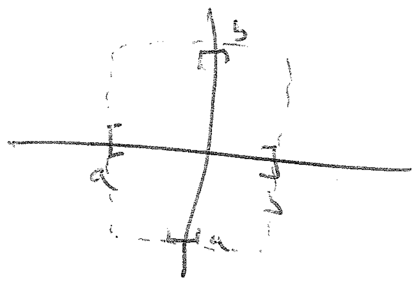
$$|f(u)-f(v)|\leq K|u-v|.$$

Då har f en fixpunkt $r\in[a,b]$, och om $x_0\in[a,b]$ så kommer

$$x_{n+1}=f(f\dots(f(x_0))\dots)$$

konvergera mot r.

Villkoret (a) betyder att f måste hålla sig inom kvadraten $[a,b]\times[a,b]$.



Villkoret (b) betyder att f inte får växa för fort på $[a,b]$.